Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2520: Métodos Matemáticos de la Física II
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2001

Tarea # 9

Fecha de Entrega: jueves 7 de junio, 2001.

48. Utilice la función $u(r) = 1 - r^{\alpha}$ en el principio variacional visto en clase para estimar $j_{0,1}$. Optimice sobre el parámetro α para obtener la mejor estimación posible.

49. En mecánica cuántica, una partícula encerrada en una esfera de radio a satisface la ecuación diferencial

$$-\Delta\psi = k^2\psi,$$

en que $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, y ψ satisface condición de borde de Dirichlet en $r = a$. Utilice la función de prueba $\psi(r) = 1 - (r/a)^2$ y el principio de Rayleigh–Ritz, para estimar el estado fundamental (autovalor más bajo) de la partícula.

50. Derive una ecuación integral de Fredholm correspondiente a la ecuación diferencial

$$u''(x) - u(x) = 0, \qquad \text{en } (-1, 1),$$

con la condiciones de borde $u(-1) = u(1) = 1$.

51. Considere la ecuación integral de Volterra

$$\varphi(x) = x - \int_0^x (t - x)\varphi(t)\, dt.$$

Resuelva esta ecuación, convirtiendo la ecuación en una ecuación diferencial con condiciones de borde apropiadas y resolviendo la ecuación diferencial obtenida.

52. Demuestre que la ecuación homogénea de Volterra

$$\psi(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\psi(t)\, dt$$

no posee soluciones no triviales (i.e., no idénticamente nulas), si $\psi(x)$ y $K(x,t)$ son suficientemente *suaves*.

53. Resuelva la ecuación integral

$$\psi(x) = x + \int_0^1 (1 + xt)\psi(t)\, dt,$$

de dos maneras: a) usando series de Neumann; b) usando el hecho que el núcleo es separable.

54. Resuelva la ecuación de Volterra

$$\varphi(x) = 1 + \lambda^2 \int_0^x (x-t)\varphi(t)\, dt,$$

de dos maneras: a) reduciéndola a una ecuación integral; b) por series de Neumann.

55. Obtenga los autovalores y autofunciones en cada uno de los casos siguientes:
a)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (t-x)\varphi(t)\, dt.$$

b)

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \cos(t-x)\varphi(t)\, dt.$$

c)

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x-t)^2\varphi(t)\, dt.$$

Referencias:

1. F.G. Tricomi, *Integral Equations*, Dover, NY, 1985.
2. G.B. Arfken, y H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, 4th edition*, Academic Press, San Diego, 1995. Capítulo 16.

Notas históricas:

John William Strutt, Lord Rayleigh: nació en Langford Grove, cerca de Maldon, Essex, Inglaterra, el 12 de noviembre de 1842. Asistió a Eton y Harrow, pero como fue muy enfermizo durante su ni nez tuvo que interrumpir el colegio y, durante cuatro años, tuvo un tutor privado. Entró a Trinity College, Cambridge, en 1861, graduándose en 1864. Su primer trabajo fue sobre la Teoría Electromagnética de Maxwell. Trabajó en la propagación del sonido y, mientrás realizaba una estadía en Egipto por razones de salud, escribió el libro *Treatise on Sound* (1870–1871). En 1879 escribió un artículo sobre ondas viajeras en fluidos, teoría que se ha desarrollado en tiempos contemporáneos en lo que hoy se conoce como teoría de *solitones*. Su teoría sobre la *dispersión de la luz* (1871) dió por primera vez una explicación correcta de por qué el cielo es azul. En 1873 obtuvo el título hereditario de Barón de Rayleigh. Entre 1879 y 1884 ocupó la cátedra de Cavendish Professor en física experimental, sucediendo a J. C. Maxwell. Luego, a partir de 1884, fue secretario de la Royal Society. En 1895 descubrió el gas noble Argón, trabajo que le valió el Premio Nobel de Física en 1904. Obtuvo la medalla *De Morgan*, de la Sociedad Matemática de Londres en 1890. Fue Presidente de la Royal Society entre 1905 y 1908 y luego Chancellor de la Universidad de Cambridge en 1908. Falleció el 30 de Junio de 1919 en Witham, Essex.

(Ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Rayleigh.html)

Erik Ivar Fredholm: nació en Estocolmo el 7 de abril de 1866. Fue alumno de Física Matemática en Upsala y Estocolmo. Obtuvo su doctorado en 1896 en Upsala. Fue nombrado profesor de mecánica y física matemática en Estocolmo en 1906. Alumno de Gosta Mittag-Leffler, Fredholm es conocido principalmente por sus trabajos sobre ecuaciones integrales y teoría espectral. Desarrolló la teoría de lo que hoy se conoce como ecuaciones integrales de Fredholm en el artículo *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (1900). Con anterioridad Vito Volterra había estudiado algunos aspectos sobre ecuaciones integrales. Fredholm escribió artículos de gran calidad que atrajeron la rápida atención a en Europa. David Hilbert extendió los trabajos de Fredholm y dió una teoría espectral completa para la ecuación integral de Fredholm. Murió el 17 de Agosto de 1927 en Estocolmo. (Ver http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematicians/Fredholm.html)

©Rafael Benguria D., 2001