

Sistema Masa–Resorte–Amortiguador:

A continuación estudiaremos la dinámica de un sistema compuesto por una Masa, que se desplaza sobre una mesa lisa (i.e., sin roce) y la cual está unida a una pared, por medio de un resorte y un amortiguador como se ilustra en la figura. El resorte tiene constante elástica k y largo natural ℓ_0 , en tanto que el amortiguador tiene coeficiente de roce viscoso c . Llamemos x a la posición de la masa M medida desde la pared. Sobre la masa actúan solo dos fuerzas en la dirección horizontal: la fuerza que ejerce el resorte y la fuerza del amortiguador. Para pequeños desplazamientos con respecto a su largo natural, la fuerza que ejerce el resorte sobre la masa está dada por

$$F_{\text{res}} = -k(x - \ell_0), \quad (1)$$

en tanto que la fuerza que ejerce el amortiguador está dada por

$$F_{\text{am}} = -c\dot{x}. \quad (2)$$

Así, la ecuación de Newton para la masa M está dada por

$$M\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - c\dot{x}. \quad (3)$$

En lo que sigue estudiaremos las oscilaciones de este sistema con respecto al equilibrio estático. Para ello, primero determinamos la posición de equilibrio estático, caracterizada por las condiciones $\dot{x} = 0$ (i.e., el sistema está en reposo) y $F_{\text{tot}} = 0$, i.e., $-k(x - \ell_0) - c\dot{x} = 0$. Imponiendo estas dos condiciones, encontramos de inmediato que la posición de equilibrio está dada por

$$x_{\text{eq}} = \ell_0. \quad (4)$$

Nuestro interés es determinar las pequeñas oscilaciones de la masa M con respecto a la posición de equilibrio, para lo cual es conveniente hacer un cambio de variables. Así, introducimos $s \equiv x - x_{\text{eq}} = x - \ell_0$. De aquí obtenemos de inmediato que $\dot{x} = \dot{s}$ y $\ddot{x} = \ddot{s}$. Reemplazando estas ecuaciones en (3) obtenemos la siguiente ecuación para la variable $s(t)$,

$$M\ddot{s} + c\dot{s} + ks = 0. \quad (5)$$

Esta ecuación para s es una ecuación diferencial lineal de segundo orden para $s(t)$.

Con el objeto de determinar la evolución del sistema, no solo necesitamos la ecuación (5), sino que además debemos conocer el *estado inicial* del sistema, i.e., la posición y la velocidad inicial de la masa M , tal como hemos enfatizado en capítulos anteriores. En resumen, queremos determinar el comportamiento de la solución $s(t)$ de (5) dados los valores iniciales para $s(0)$ y $\dot{s}(0)$. Para ello, usaremos la siguiente estrategia, que fue establecida por Leonardo Euler (1706–1783) (ver, e.g., [1]). Recordemos que la función exponencial e^t juega un papel fundamental en cálculo, debido a que al derivarla queda igual, i.e., $de^t/dt = e^t$. Usando la regla de la cadena, vemos así mismo que $de^{pt}/dt = pe^t$ y $d^2e^{pt}/dt^2 = p^2e^t$ (si p es una constante). Siguiendo a Euler entonces, intentamos una solución de la forma

$$s(t) = e^{pt} \quad (6)$$

para la ecuación (5). Usando las propiedades de la función exponencial que acabamos de describir, vemos que (6) es solución de (5) siempre que tengamos

$$(Mp^2 + cp + k)e^{pt} = 0 \quad (7)$$

para todo t . Como $e^{pt} > 0$, la condición anterior implica que p debe ser una solución de la ecuación de segundo grado

$$Mp^2 + cp + k = 0, \quad (8)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$p_{1,2} = -\frac{c}{2M} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}. \quad (9)$$

El tipo de soluciones de la ecuación (8) depende de los valores relativos de los parámetros del sistema, M , k y c . Vamos a distinguir cuatro casos, los cuales analizaremos separadamente mas adelante:

- i) $c^2/(4Mk) > 1$: en este caso (8) tiene dos soluciones reales negativas distintas, $p_1 < p_2 < 0$.
- ii) $c^2/(4Mk) = 1$: en este caso (8) tiene una solución real negativa (repetida), i.e., $p_1 = p_2 < 0$.
- iii) $c^2/(4Mk) < 1$: en este caso (8) tiene un par de soluciones complejas conjugadas. Ambas tienen parte real negativa $-c/(2M)$.
- iv) $c = 0$: en este caso (8) tiene dos soluciones imaginarias conjugadas, i.e., $p_{1,2} = \pm i\sqrt{k/M}$.

Salvo en el caso iii), existen pues dos soluciones distintas p_1 y p_2 de (8). De este modo, usando la estrategia de Euler, hemos obtenido dos soluciones

$$s_1(t) = e^{p_1 t},$$

y

$$s_2(t) = e^{p_2 t}$$

de la ecuación diferencial (5). Como la ecuación (5) es lineal, uno puede comprobar de inmediato que cualquier combinación lineal de $s_1(t)$ y $s_2(t)$ también es solución. De hecho, si las raíces p_1 y p_2 son distintas, se puede demostrar que cualquier solución (i.e., la *solución general*) de (5) se puede escribir como

$$s(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t) = \alpha e^{p_1 t} + \beta e^{p_2 t}, \quad (10)$$

en que α y β son constantes (en general complejos). Usando (10) podemos determinar entonces la solución de nuestro problema original, encontrando valores apropiados de α y β de modo que (10) satisfaga las condiciones iniciales. Evaluando (10) en $t = 0$, obtenemos,

$$\alpha + \beta = s(0). \quad (11)$$

Por otra parte, derivando (10) con respecto a t y luego evaluando en $t = 0$, obtenemos,

$$\alpha p_1 + \beta p_2 = \dot{s}(0). \quad (12)$$

Finalmente, podemos resolver el sistema de dos ecuaciones, (11) y (12) para α y β . Entonces, si $p_1 \neq p_2$ encontramos,

$$\alpha = \frac{\dot{s}(0) - p_2 s(0)}{p_1 - p_2}, \quad (13)$$

y

$$\beta = \frac{\dot{s}(0) - p_1 s(0)}{p_2 - p_1}, \quad (14)$$

respectivamente. Reemplazando estos valores obtenidos para α y β en términos del estado inicial del sistema en (10), podemos finalmente escribir la solución de nuestro problema (siempre que $p_1 \neq p_2$), como

$$s(t) = s(0) \frac{p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} + \dot{s}(0) \frac{e^{p_2 t} - e^{p_1 t}}{p_2 - p_1}. \quad (15)$$

Usando la regla de L'Hôpital, podemos incluso obtener la solución de nuestro problema en el caso $p_1 = p_2$. Este caso lo podemos obtener tomando el $\lim_{p_2 \rightarrow p_1} s(t)$ en la ecuación anterior. Con un poco de cuidado, obtenemos de inmediato,

$$s(t) = s(0)(1 - pt)e^{pt} + \dot{s}(0)te^{pt}, \quad (16)$$

para el caso en que $p_1 = p_2 \equiv p = -c/(2M)$.

Una vez que hemos encontrado la solución $s(t)$ al problema de valores iniciales para el sistema masa-resorte-amortiguador, es conveniente ahora discutir el comportamiento de dicha solución para distintos valores de los parámetros (i.e., para los cuatro casos introducidos anteriormente). Lo que determina el distinto comportamiento de la solución en estos cuatro casos es el valor de la expresión

$$r \equiv \frac{c^2}{4Mk}.$$

El parámetro r mide la magnitud relativa del amortiguador comparada con la magnitud del resorte. Nótese que r es un parámetro adimensional. Si $r > 1$, el efecto del amortiguador es más importante que el del resorte. En este caso $s(t)$ muere exponencialmente sin oscilar. Por razones obvias este caso se conoce como *Sobreamortiguado*. Por otra parte, si $r < 1$ el resorte es más importante que el amortiguador, la solución $s(t)$ muere exponencialmente, pero oscila. Este caso, se conoce como *subamortiguado*. El caso límite entre ambas situaciones, $r = 1$ se conoce como *amortiguamiento crítico*. Finalmente, el caso $r = c = 0$ corresponde al caso en que no hay amortiguación y se denomina como el caso *oscilatorio*.

i) $c^2/(4Mk) > 1$ *sobreamortiguamiento*: como hemos dicho anteriormente, $p_1 < p_2 < 0$ son reales, negativas. Si llamamos

$$\Lambda = \sqrt{\frac{c^2}{4M^2} - \frac{k}{M}},$$

tenemos que $p_{1,2} = -c/(2M) \pm \Lambda$, de modo que $p_1 - p_2 = 2\Lambda$. Reemplazando los valores de p_1 y p_2 en (16), y usando las expresiones habituales para las funciones hiperbólicas, i.e., $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ y $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, podemos escribir la solución $s(t)$ en este caso como

$$s(t) = e^{-ct/(2M)} \left(\frac{s(0)}{\Lambda} \frac{c}{2M} \sinh(\Lambda t) + s(0) \cosh(\Lambda t) + \frac{\dot{s}(0)}{\Lambda} \sinh(\Lambda t) \right)$$

Esta solución tiene a lo más un cero, dependiendo de las condiciones iniciales, y decae exponencialmente, cuando $t \rightarrow \infty$. De hecho, como p_2 es la raíz de menor módulo, $s(t)$ va a cero como $Ae^{p_2 t}$ en que A es una constante que depende de las condiciones iniciales

ii) $c^2/(4Mk) = 1$ *amortiguamiento crítico*: en este caso (8) tiene una solución real negativa (repetida), i.e., $p_1 = p_2 = -c/(2M) < 0$, y de (16) tenemos,

$$s(t) = s(0)\left(1 + \frac{c}{2M}t\right)e^{-ct/(2M)} + \dot{s}(0)te^{-ct/(2M)}.$$

iii) $c^2/(4Mk) < 1$ *subamortiguamiento*: en este caso (8) tiene un par de soluciones complejas conjugadas. Ambas tienen parte real negativa $-c/(2M)$. Si llamamos ahora

$$\Omega^2 = \frac{k}{M} - \frac{c^2}{4M^2},$$

entonces podemos escribir el par de raíces complejas conjugadas como $p_{1,2} = -c/(2M) \pm i\Omega$ (en que como es habitual, $i \equiv \sqrt{-1}$). Usando la formula de Euler, i.e., $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, de modo que $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ y $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$, respectivamente, usando (16) podemos escribir en este caso la solución como,

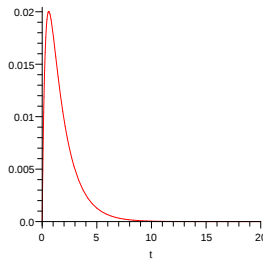
$$s(t) = e^{-ct/(2M)} \left(\frac{s(0)}{\Omega} \frac{c}{2M} \sinh(\Omega t) + s(0) \cos(\Omega t) + \frac{\dot{s}(0)}{\Omega} \sinh(\Omega t) \right) \quad (17)$$

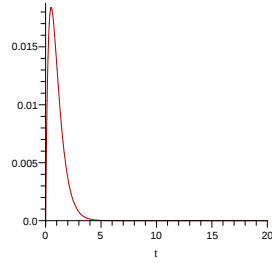
iv) $c = 0$ *caso oscilatorio*: en este caso (8) tiene dos soluciones imaginarias conjugadas, i.e., $p_{1,2} = \pm i\sqrt{k/M}$. Llamando $\Omega = \sqrt{k/M}$, la solución, en este caso es'tá dada por,

$$s(t) = s(0) \cos(\Omega t) + \frac{\dot{s}(0)}{\Omega} \sin(\Omega t).$$

En las figuras que siguen, ilustramos la solución $s(t)$, dado el estado inicial, $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0.1$, para parámetros $k = 9/4$, $M = 1$ fijos y distintos valores de c .

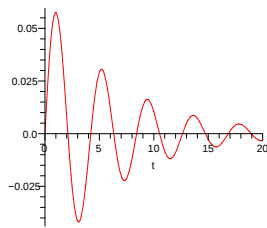
El primer gráfico corresponde a $c = 4$ (i.e., $r = 1.777 \dots$) (i.e., *caso sobreamortiguado*):



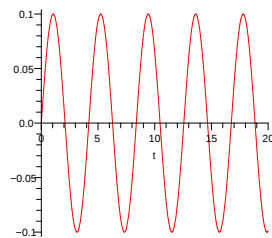


El segundo gráfico corresponde a $c = 3$ (i.e., $r = 1$) (i.e., *amortiguamiento crítico*):

El tercer gráfico corresponde a $c = 0.3$ (i.e., $r = 0.01$) (i.e., *caso subamortiguado*):



Finalmente el cuarto gráfico corresponde a $c = 0$ (i.e., $r = 0$) (i.e., *caso oscilatorio*):

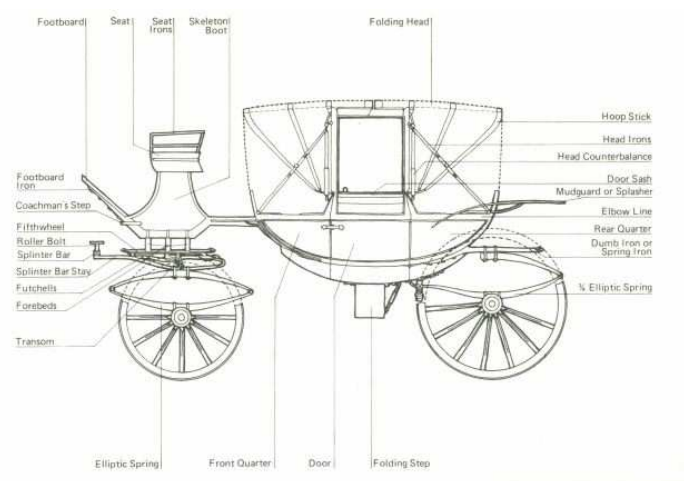


Breve historia de los mecanismos de suspensión: La historia de los mecanismos de suspensión se remonta a las antiguas civilizaciones. Ya en tiempos de egipcios y romanos se utilizaron al menos simples mecanismos de suspensión en carruajes tirados por caballos con el fin de hacer los viajes mas suaves para sus pasajeros. Quizás la descripción más antigua de un mecanismo de suspensión es la que se refiere al *Pilentum*, un antiguo coche romano. En el se utilizaron barras elásticas de madera entre el carro y las ruedas para hacer un viaje mas suave (ver figura).



Figure 1: sistema de suspensión del “Pilentum”

Estas barras elásticas de madera son los antiguos antecesores de los actuales resortes planos de placas metálicas (“leaf springs”) que se utilizan aún ahora en muchos automóviles. En 1804, en Londres, Obadiah Elliott patentó el primer sistema moderno de resortes planos de metal (el así llamado resorte elíptico). El diseño de Elliott consistía en varias placas de acero de distinto largo, apiladas una sobre otra, atornilladas. Este sistema se unía luego mediante dos piezas metálicas en forma de U, una al carruaje y la otra al eje de las ruedas. En la figura siguiente se indica un sistema de resortes elípticos para las ruedas delanteras, y un sistema 3/4 elíptico para las ruedas traseras, de un carruaje.



En 1763, R. Tredwell patentó los resortes espirales.



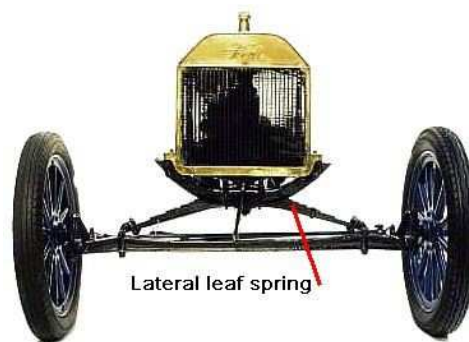
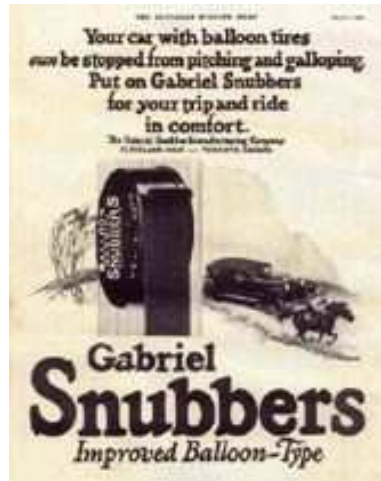
Con la invención de los automóviles en la segunda mitad del siglo XIX, surgió la necesidad de mejores sistemas de suspensión. En 1898, el ciclista francés J. M. M. Truffault, construyó el primer *amortiguador*, que utilizó para bicicletas de carrera.



Ya en esa época hubo varios diseños de cierto tipo de amortiguadores, los que básicamente consistían en bloques de caucho entre las barras de los resortes planos a que nos referimos más arriba. De este tipo son los *amortiguadores* introducidos por A. Gimmig en 1897 y por William Brush en 1904. En 1900, Claude H. Foster (1862–1965) fundó la empresa “Gabriel” (este nombre hace alusión por razones obvias al Arcángel San Gabriel), en Cleveland Ohio, para fabricar las primeras bocinas manuales (clásicas en las películas antiguas) para automóviles. Foster, en 1907, introdujo una especie de *amortiguadores*: los “Snubbers”.

En 1908, al introducir el clásico modelo T, Henry Ford, introdujo una variante en el uso de los resortes planos, al utilizar en cada eje solo un resorte, pero dispuesto en forma horizontal (ver figura).

También en 1908, M. Houdaille, en Francia creó el primer amortiguador hidráulico. En 1918, August F. Meyer y su socio Charles S. McIntyre, crearon la empresa “Brisk Blast” para fabricar bombas manuales de aire (i.e., *bombines*) para automóviles, en Monroe, Michigan, EE.UU. A partir de 1919, esta empresa adoptó el nombre de “Monroe Auto Equipment Manufacturing Co.” Esta empresa llegó a fabricar decenas de miles de bombines a principios de los 20, hasta que la mayoría de las estaciones de servicio en EE.UU. contaron con compresores de aire, lo que hizo decaer bruscamente la venta de bombines para automóvil.



Es entonces que la empresa Monroe cambió de interés, y en 1926 introdujo el primer *amortiguador* moderno (el “Monroe Shock Eliminator”). Desde entonces ha habido continuos avances en los sistemas de suspensión de los automóviles, con todo tipo de dispositivos para hacer aun mas confortable el desplazamiento en ellos.

A principios e 2009, un grupo de estudiantes de pregrado en el MIT (Cambridge, MA, EE.UU.) diseñó un sistema para aprovechar la energía disipada en los amortiguadores de los automóviles, los que los puede hacer en promedio un diez por ciento más eficientes [3].

REFERENCIAS:

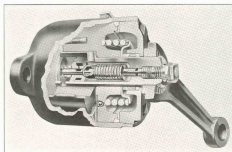
- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_differential_equation
- [2] <http://www.motorera.com/history/hist08.htm>
- [3] <http://www.renewableenergyworld.com/rea/news/article/2009/02/mit-shock-absorber-increases-fuel-economy>

OPERATING PRINCIPLE

Ford Houdaille Double Acting Shock Absorbers operate entirely on the principle of hydraulic resistance. Special shock absorber fluid is forced from one chamber to another by the movement of the lever arm.

LUBRICATION—FLUID

The operating parts of the shock absorber are automatically lubricated by the fluid. The working chamber is automatically kept full by an auxiliary supply of fluid which enters the working chamber when needed. (Instructions for regular inspection of this fluid is shown under heading—"REFRESHING: FLUID—5,000 MILES INSPECTION.")



SECTION VIEW — 1940 SHOCK ABSORBER

ADJUSTABLE VALVE

All Ford Houdaille Shock Absorbers sold today for the 1928 to 1940 models incorporate an externally adjustable valve. By adjusting the valve, it is possible to provide shock absorber control to meet any individual owner's preference on ride. If the instructions shown on page 7 are carefully followed, a softer ride is possible or more control can be obtained, whichever the owner prefers.

AUTOMATIC SEAL

The 1940 model shock absorbers are fitted with a new design self-adjusting packing gland which has been road tested for more than 100,000 miles on rail cars and automobiles. There is nothing to tighten or take up by hand. All this is accomplished automatically by the continuous take-up spring. The spring exerts a steady pressure against the packing seat, which in turn presses a flexible packing tightly into the groove, maintaining a fluid-tight joint between the shaft and the casing. (Old types can be rebuilt to incorporate this feature. See "INSTRUCTIONS FOR REBUILDING" and "PARTS KIT" on page 10.)