Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 2
Fecha de Entrega: Jueves 31 de Agosto, 2000.

Problema 6:

a) Demuestre que $f(z) = x^2 + i\,y^2$ es diferenciable en todos los puntos de la recta $y = x$. Demuestre además que $f(z)$ no es analítica en ninguna parte.

b) Suponga que f es analítica y es de la forma $f(x, y) = u(x) + i\,v(y)$. Muestre que $f(z)$ es un polinomio lineal.

Problema 7:

a) Encuentre todas las soluciones de

$$e^z = 1, \qquad e^z = -3, \qquad e^z = i, \qquad e^z = 1 + i.$$

b) Encuentre todas las soluciones de

$$\operatorname{sen} z = 2.$$

Problema 8:

Determine cual de las siguientes funciones es armónica. En el caso que la función sea armónica determine todas las funciones armónicas cuya parte real es la función dada.

a) $x^2 - y^2 + y$,
b) $x^3 - y^3$,
c) $3x^2y - y^3 + xy$,
d) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + x^3y - xy^3$,

e) $e^{x^2-y^2}\mathrm{sen}(2xy)$,
f) $xe^x \cos y - ye^x \mathrm{sen}\, y$.

Problema 9:

a) Encuentre las partes real e imaginaria de

$$\cosh(\pi i), \qquad e^i, \qquad \mathrm{sen}(\pi i), \qquad \mathrm{senh}(1+i).$$

b) Encuentre $|\cos z|^2$, $|\mathrm{sen}\, z|^2$.

c) Encuentre todos los ceros y todos los períodos de las funciones

$$\cos z, \qquad \mathrm{senh}\, z, \qquad \cosh z, \qquad \tan z, \qquad \tanh z.$$

Problema 10:

Sea $\omega_k = e^{2\pi i k/n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Si m es entero demuestre que

$$\omega_1^m + \omega_2^m + \ldots \omega_n^m = 0,$$

a menos que m sea un múltiplo de n, en cuyo caso la suma es n.

Referencias:

1. Norman Levinson y Raymond M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden Day, Inc., San Francisco, 1970; Capítulo 2. (Disponible en Biblioteca de Matemáticas: 515.93, L655c).