Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 4
Fecha de Entrega: Jueves 14 de Septiembre, 2000

Problema 16:

Si Ces el círculo $|z| = 1$, calcule

$$\int_C \frac{dz}{z}, \qquad \int_C \frac{dz}{|z|} \qquad \int_C \frac{|dz|}{z}, \qquad \int_C \frac{dz}{z^2}, \qquad \int_C \frac{dz}{|z^2|} \qquad \int_C \frac{|dz|}{z^2}.$$

Problema 17:

Si C es el círculo $|z| = 1$, demuestre, utilizando el Teorema

$$|\int_C f(z)\, dz| \le M \cdot L$$

visto en clases, que

$$|\int_C \frac{dz}{4+3z}| \le 2\pi \qquad \text{and} \qquad |\int_C \frac{dz}{4+3z}| \le \frac{6}{5}\pi.$$

Nota: En el segundo caso considere en forma separada las partes de C con $x > 0$ y $x < 0$.

Problema 18:

a) Si $0 < r < R$, integre la función

$$\frac{R+z}{(R-z)z} \equiv \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z}$$

sobre el círculo $|z| = r$ y deduzca que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\, \cos\theta + r^2}\, d\theta = 1.$$

b) Integrando $1/(R-z)$ sobre el círculo $|z| = r$ demuestre que,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\cos\theta}{R^2 - 2Rr\, \cos\theta + r^2}\, d\theta = \frac{r}{R^2 - r^2}, \qquad 0 \le r < R.$$

Problema 19:
Demuestre que si a es real, la integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2}\, dx$$

no depende de a.
Nota: Sin pérdida de generalidad suponga que $a > 0$. Como e^{-z^2} es una función entera,

$$\int_C e^{-z^2}\,dz = 0$$

en que C es el rectángulo con vértices en $-b$, b, $b+ia$ y $-b+ia$. Luego utilice

$$|\int_0^a e^{-(b+iy)^2}\,dy\,| \le e^{-b^2}\int_0^a e^{y^2}\,dy,$$

(¿por qué?), y haga $b \to \infty$ para demostrar que $I(a) = I(0)$.

Problema 20: *Teorema Fundamental del Algebra: Primera Demostración.*

Si $P(z)$ es un polinomio no constante, muestre que $P(z)$ tiene al menos una raíz.
Nota: Defina el polinomio $Q(z)$ por medio de

$$P(z) \equiv a_n z^n + \ldots a_1 z + a_0 = zQ(z) + a_0,$$

en que $n \ge 1$ $a_n \ne 0$. Entonces,

$$\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{zP(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)}.$$

Si $P(z)$ no se anulara, la integral del primer término en un contorno cerrado sería cero (¿ por qué?), de modo que

$$2\pi i = \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\,dz.$$

Si $|z| = R \to \infty$, $\lim P(z)/a_n z^n = 1$ de modo que para R grande $|P(z)| \ge |a_n||z|^n/2$. A partir de este hecho y de la integral anterior, encuentre una contradicción en el límite $R \to \infty$.

Referencias:

1. Norman Levinson y Raymond M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden Day, Inc., San Francisco, 1970; Capítulo 3. (Disponible en Biblioteca de Matemáticas: 515.93, L655c).