Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 5
Fecha de Entrega: Jueves 21 de Septiembre, 2000

Problema 21:
Sea C el contorno cerrado que encierra al semi–disco $|z| \leq R$, $\Im z \geq 0$, una vez, en el sentido contrario a los punteros del reloj, en que $R > 1$. Utilice la formula integral de Cauchy para evaluar $\oint_C dz/(1+z^2)$, y parametrizando adecuadamente el contorno demuestre que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{R^3 - R}{1 + R^4 + 2R^2 \cos 2\theta} \mathrm{sen}\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan R.$$

¿ Es válida la identidad anterior en los límites $R = \infty$ o $R = 1$?; explique.
Problema 22:
Sea C un contorno que bordea la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ una vez en el sentido contrario a los punteros del reloj (a, b son reales positivos y $z = x + iy$. Parametrice la elipse y evalue $\oint dz/z$ con el objeto de derivar la identidad

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2\theta + b^2 \mathrm{sen}^2\theta} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Problema 23:
Considere la función entera $f(z)$ que satisface $|f(z)| \leq R\epsilon(R)$ para $|z| = R$ grande, donde $\lim \epsilon(R) = 0$ cuando $R \to \infty$. Demuestre que $f(z)$ es una constante.
Problema 24:
Si $f(z)$ es una función entera tal que $\Re f(z) \leq M$, para todo z, donde M es una constante, demuestre que $f(z)$ es una constante. Indicación: Aplique el teorema de Liouville a la funcion $\exp f(z)$.
Problema 25:
Evalúe $\oint z^\alpha \, dz$ una vez alrededor del círculo unitario, donde α es cualquier número complejo (considere todos los casos). Cuando sea necesario, elija un corte para la función z^α que intersecte al círculo unitario solo una vez. ¿ Depende la integral de la elección del corte?

Referencias:

1. Norman Levinson y Raymond M. Redheffer, *Complex Variables*, Holden Day, Inc., San Francisco, 1970; Capítulo 3. (Disponible en Biblioteca de Matemáticas: 515.93, L655c).
2. Una buena referencia sobre Superficies de Riemann se encuentra en la página Web del curso de variable compleja de Bazant y Rosales, del MIT: http://www-math.mit.edu/18.04/