Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 6
Fecha de Entrega: Jueves 28 de Septiembre, 2000

Problema 26:

Los polinomios de Laguerre $L_n(z)$ están dados por

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n}(z^n e^{-z}).$$

Muestre que, para todo z en el interior de un contorno simple C,

$$L_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{w^n e^{-(w-z)}}{(w-z)^{n+1}} \, dw.$$

Problema 27:

Obtenga la fórmula de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta \, d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \, \frac{\pi}{2}.$$

al integrar $f(z) = (z + (1/z))^{2n}/z$ sobre $|z| = 1$.

Problema 28:

En los casos siguientes, desarrolle las funciones dadas en una serie de Taylor alrededor de z_0. Indique el máximo disco donde sea válida esta representación:

$f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = -1$.
$f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = i$.
$f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = +1$.
$f(z) = \cos z$, $z_0 = \pi/2$.
$f(z) = \log z$, $z_0 = 2e^{3\pi i}$.

Problema 29:

Demuestre que si dos funciones analíticas en un dominio D coinciden en un subconjunto de D, que tiene un punto de acumulación de D, entonces coinciden en todos los puntos de D.

Problema 30:

Determine si existe una función analítica en $|z| < 2$ que tome, en los puntos $z = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ los valores dados en los ejercicios siguientes:

a) $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$

b) $1, 0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/7, 0, 1/9, \ldots$

c) $1, 2/3, 3/5, 4/7, 5/9, 6/11, 7/13, 8/15, \ldots$

Referencias:

1. William R. Derrick, *Variable Compleja con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamericana, México, DF, 1987 (traducción al castellano de la obra original *Complex Analysis and Applications*, second edition, Wadsworth, Inc., Belmont, 1984), Capítulos 2 y 3.