

Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ-2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 7
Fecha de Entrega: Jueves 5 de Octubre, 2000

Problema 31:

Encuentre la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(z^2 + z)$ en las regiones:
a) $0 < |z| < 1$; b) $0 < |z - 1| < 1$; c) $1 < |z - 1| < 2$.

Problema 32:

Encuentre las series de Laurent de las siguientes funciones en la región $0 < |z| < \infty$.

$$ze^{1/z}; \quad e^{z+1/z}; \quad \operatorname{sen} z \operatorname{sen}(1/z); \quad \operatorname{sen}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Problema 33:

La **función de Bessel** $J_n(z)$ se define como el n -ésimo coeficiente de la serie de Laurent de la función

$$e^{(z/2)(w-1/w)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) w^n.$$

Muestre que

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \operatorname{sen}\theta) d\theta.$$

Problema 34:

Encuentre la serie de Laurent de $\operatorname{cosec} z$ en $\pi < |z| < 2\pi$.

Problema 35:

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre y clasifique las singularidades:

$$\frac{z}{z^3 + z}; \quad ze^{1/z}; \quad e^{\tan 1/z}.$$

Problema 36:

Construya una función que tenga una singularidad removible en $z = -1$, un polo de orden 3 en $z = 0$, y una singularidad esencial en $z = 1$. Entonces encuentre su serie de Laurent en la región $0 < |z| < 1$.

Referencias:

1. William R. Derrick, *Variable Compleja con Aplicaciones*, Grupo Editorial Iberoamericana, México, DF, 1987 (traducción al castellano de la obra original *Complex Analysis and Applications*, second edition, Wadsworth, Inc., Belmont, 1984), Capítulo 3.

Nota histórica Pierre Alphonse Laurent nació en París el 18 de Julio de 1813. Fue parte del cuerpo de ingenieros y estuvo dirigiendo durante seis años las obras de extensión del Puerto de El Havre. Sometió fuera de plazo su trabajo para el Gran Premio de 1842. Cauchy reportó dicho trabajo, el que determinaba las Series de Laurent para una función compleja, recomendando su aprobación, la que fue descartada. Laurent murió en Paris el 2 de Septiembre de 1854. (Ref.: www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/)