Facultad de Física, P. Universidad Católica de Chile
FIZ–2510: Métodos Matemáticos de la Física I
Curso: R. Benguria, Semestre Primavera 2000
Tarea # 9
Fecha de Entrega: Jueves 19 de Octubre, 2000

Problema 42:

Evalúe las tres sumas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}.$$

Problema 43:

Evalúe la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{1}{8^n}.$$

Problema 44:

Muestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}},$$

con $|x| < 1/4$. **Nota:** Esta suma corresponde a la suma de la línea vertical del medio del triángulo de Pascal. Por supuesto se puede evaluar usando la expansión del binomio del lado derecho, pero aquí lo que se pide es que calcule la suma utilizando el Teorema del Residuo.

Problema 45:

Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - e^{-x}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Problema 46:

Muestre que existe una única rama analítica fuera del círculo unitario de la función $f(z) = \sqrt{z^2 + z + 1}$ tal que $f(t)$ es positivo cuando $t > 1$. Utilizando dicha rama calcule la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}},$$

en que C_R es el círculo $|z| = r$, y $r > 1$.